Каспийский институт морского и речного транспорта
филиал Федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего образования
«Волжский государственный университет водного транспорта»
(ФГБОУ ВО «ВГУВТ»)

«УТВЕРЖДАЮ»

Зам. директора по учебной работе
_____ М.В. Карташов
« 15 » февраля 2017 г.

Методические указания

по выполнению практических работ

по дисциплине «Математика»

для курсантов 2 курса

специальности 26.02.06 «Эксплуатация судового электрооборудования и средств автоматики»

РАССМОТРЕНО

на заседании цикловой методической комиссии

математических и естественнонаучных дисциплин

Протокол № 7
от « 14 » февраля 2017 года

Председатель ЦМК _____ Е.А. Романова
(подпись) (Ф.И.О.)

СОСТАВИЛ

Л.П. Яцух
_____ _____
(подпись) (Ф.И.О.)

ОДОБРЕНО
учебно-методическим отделом СПО

Начальник _____ В.А.Овсянников

Ст. методист _____ О.Н. Вербицкая

2017 г.

Пояснительная записка

Практическая работа курсантов проводится с целью систематизации и закрепления полученных теоретических знаний и практических умений; углубления и расширения теоретических знаний; формирование умений использовать нормативную, правовую, справочную и специальную литературу, развития познавательных способностей и активности курсантов; самостоятельности, ответственности и организованности, развития исследовательских умений.

Практические работы служат для:

- раскрытия практического значения (применения) исследовательской работы, описание того, как могут применяться полученные результаты.

-использования результатов исследования в практической деятельности, независимо от того – является данная квалификационная работа теоретической или практической.

Необходимо по возможности полно обобщить теоретический и нормативный материал по данной теме, подвергнув его определенной научной систематизации, проанализировать различные стороны рассматриваемой проблемы. При этом возможны небольшие по объему экскурсы исторического характера, если они помогают более полно раскрыть тему.

Практические работы разработаны в рамках рабочей программы профессионального модуля– являющегося частью основной профессиональной образовательной программы. Проведение практических работ предусматривает своей целью закрепление теоретических знаний и приобретение необходимых практических умений по программе.

Выполнение практических работ способствует разносторонней подготовке студентов к производственной деятельности в современных условиях, а также более полному усвоению теоретического материала.

Форма проведения практических работ выбирается преподавателем, исходя из дидактической цели и содержания материала.

Перечень практических работ по дисциплине «Математика». 2 курс.

№ п/п	№ раздела	Наименование	Кол-во часов	Примечание
		I семестр	**24**	
	1.	**Вычисление простых пределов функций**	**2**	
	2.	**Производная сложной функции**	**2**	
	3.	**Физический и геометрический смысл производной**	**2**	
	4.	**Построение графика функции с помощью производной**	**2**	
	5.	**Метод непосредственного интегрирования**	**2**	
	6.	**Интегрирование методом замены переменной**	**2**	
	7.	**Вычисление простейших определенных интегралов**	**2**	
	8.	**Дифференциальные уравнения I-го порядка с разделяющимися переменными**	**2**	
	9.	**Дифференциальные уравнения II-го порядка**	**2**	
	10.	**Решение задач на элементы комбинаторики**	**2**	
	11.	**Решение простейших задач по теории вероятностей с использованием теорем сложения вероятностей**	**2**	
	12.	**Решение практических задач по основам математической статистики**	**2**	
	Итого		***24***	

\

Тема 1.1. Теория пределов.

Практическое занятие № 1: «Вычисление простых пределов функций»

Цели практической работы:

1.Закрепление теоретического материала по теме «Предел функции. Вычисление пределов различных функций».

2.Приобретение практических навыков по вычислению пределов функций.

3.Развитие умения действовать самостоятельно.

Краткая теория.

Предел функции на бесконечности.

Определение: Число b называют пределом функции f при x→∞, если f(x)=b+α(x), где функция α бесконечно мала при x →∞.В этом случае пишут: $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$

Теорема: Пусть существуют пределы $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$и $\lim_{x\to\infty} g(x) = c$

а) предел суммы функций f и g при x→∞ равен сумме их пределов:

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to\infty} f(x) + \lim_{x\to\infty} g(x) = b + c$$

б) если c≠0, то предел частного функций f и g при x→∞ равен частному их пределов:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} f(x)}{\lim\limits_{x\to\infty} g(x)} = \frac{b}{c}$$

в)предел произведения функций f и g при x→∞ равен произведению их пределов:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)g(x) = \lim_{x\to\infty} f(x)\cdot\lim_{x\to\infty} g(x)$$

Пример: Вычислить предел: $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-3x+1}{5x^3+6x^2-7}$

При безграничном возрастании x и числитель, и знаменатель тоже безгранично возрастают. Поэтому предел дроби нельзя вычислить как отношение пределов числителя и знаменателя. Но значение дроби не измениться, если разделить числитель и знаменатель на x^3, и тогда получатся выражения, имеющие пределы при x→∞.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-3x+1}{5x^3+6x^2-7} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x^3}{x^3}-\frac{3x}{x^3}+\frac{1}{x^3}}{\frac{5x^3}{x^3}+\frac{6x^2}{x^3}-\frac{7}{x^3}} = \lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{5+\frac{6}{x}-\frac{7}{x^3}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}(4-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3})}{\lim\limits_{x\to\infty}(5+\frac{6}{x}-\frac{7}{x^3})}$$

Но $\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}$ и $\frac{6}{x}-\frac{7}{x^3}$ −бесконечно малые при x→∞, и поэтому

$\lim\limits_{x\to\infty}(4-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3})=4$, $\lim\limits_{x\to\infty}(5+\frac{6}{x}-\frac{7}{x^3})=5$.

Значит$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-3x+1}{5x^3+6x^2-7}=\frac{4}{5}$.

Предел функции в точке.

Определение: Число b называют пределом функции f при x→a, если эта функция является суммой числа b и, функции α бесконечно малой при x →a, f=b+α.

В этом случае пишут:$\lim_{x\to\infty} f(x)=b$

Примеры:

а) Вычислить: $\lim\limits_{x\to 4}(x^2-3x+8)$

Решение:

$\lim\limits_{x\to 4}(x^2-3x+8)=\lim\limits_{x\to 4}(x^2)+\lim\limits_{x\to 4}(-3x)+\lim\limits_{x\to 4}(8)=4^2-3\cdot 4+8=12$

б) Вычислить: $\lim\limits_{x\to 5}\frac{(x^2-6x+5)}{x^2-25}$

Решение: В этом случае нельзя просто подставить вместо x значение 5, так как при этом значении и числитель, и знаменатель обращаются в нуль. Но квадратный трехчлен можно разложить на множители. В нашем случае получаем:

$\lim\limits_{x\to 5}\frac{(x^2-6x+5)}{x^2-25}=\lim\limits_{x\to 5}\frac{(x-1)(x-5)}{(x+5)(x-5)}=\lim\limits_{x\to 5}\frac{(x-1)}{(x+5)}=\frac{5-1}{5+5}=\frac{4}{10}=0{,}4$

Первый замечательный предел **Второй замечательный предел**

$$\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}=1 \quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

Вариант №1

Задание 1

Вычислить:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-3x}{2x+3}$ д) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+x-3)$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+5}{x^2+x-1}$

е) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^4+2x^3+1}{x^2+5x+3}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x-11}{8x^2+6}$

ж) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^4+3x^2}{x^4+2x^2}$

г) $\lim\limits_{x\to2}(2x-1)$

Задание 2

Доказать:

$\lim\limits_{x\to4}x^2=16$

Задание 3

Вместо букв p и g поставьте такие числа, чтобы равенства стали истинными:

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{px^2+3}{gx^2+8}=\dfrac{2}{5}$

Задание 4

Вычислить:

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{sin5x\ cosx}{2x}$

Вариант №2

Задание 1

Вычислить:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x}{x+2}$

д) $\lim\limits_{x\to-3}(x^3+4x^2+x)$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x+2}{2x^3-4}$ е) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{5+2x+x^2}{x^3+3x^2+1}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-1}{2x^3+x+8}$ ж) $\lim\limits_{x\to6}\dfrac{3x+18}{x^2-36}$

г) $\lim\limits_{x\to3}(15-4x)$

Задание 2

Доказать:

$\lim\limits_{x\to3}(2x^2-6x+8)=8$

Задание 3

Вместо букв p и g поставьте такие числа, чтобы равенства стали истинными:

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{px^2+6}{gx^2-17x+2}=\dfrac{7}{4}$

Задание 4

Вычислить:

$$\lim_{x\to0}\frac{sin5x\ cosx}{2x}$$

Вариант №3

Задание 1

Вычислить:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+7}{x+2}$ д) $\lim\limits_{x\to-2}(x^4+5x-7)$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^5-9}{x^5-x^3+3x}$

е) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-24}{x^2+2x-1}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-4x+5}{x^3+4}$

ж) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-49}{2x-14}$

г) $\lim\limits_{x\to -3}(2x-8)$

Задание 2

Доказать:

$$\lim_{x\to 6}\frac{1}{x}=\frac{1}{6}$$

Задание 3

Вместо букв p и g поставьте такие числа, чтобы равенства стали истинными:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{p\,x^3+3x-8}{g\,x^3-2x^2}=\frac{3}{8}$$

Задание 4

Вычислить:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x}{3x+1}\right)^x.$$

Вариант №4

Задание 1

Вычислить:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x-9}{3+2x}$

д) $\lim\limits_{x\to 3}(x^2-3x+2)$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x+2}{x^2}$ е) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+5x-3}{x^3-2x+2}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^5-9x+3}{x^7-3x}$ ж) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2}{x^4-x^2}$

г) $\lim\limits_{x\to 0}(4x+12)$

Задание 2

Доказать:

$$\lim_{x\to 5}\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{24}$$

Задание 3

Вместо букв p и g поставьте такие числа, чтобы равенства стали истинными:

$$\lim_{x\to 5}\frac{p\,x^8-3}{g\,x^8-5x^2+2}=\frac{1}{7}$$

Задание 4

Вычислить:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^4 2x}{x^4}$$

Вариант №5

Задание 1

Вычислить:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x-8}{4x}$ д) $\lim\limits_{x\to 2}(x^3+3x-9)$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x^2+5}{x^3-x^2}$ е) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-3x+2}{x^3-1000}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+3x^2}{x^5-3x^3+7}$ ж) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{3x-27}{x^2-81}$

г) $\lim\limits_{x\to 5}(3x-8)$

Задание 2

Доказать:

$$\lim_{x\to 4}\sqrt{x}=2$$

Задание 3

Вместо букв p и g поставьте такие числа, чтобы равенства стали истинными:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{p\,x^3+7}{g\,x^3+7}=200$$

Задание 4

Вычислить:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{cos^2\,x}$$

Литература.

1. Учебник Н В. Богомолова “Математика. Среднее профессиональноеобразование”. Москва “Дрофа” 2012г.

2.Г.Н.Яковлев «Алгебра и начала анализа» часть 1. Москва издательство «Наука» 2011г.

3. Методические указания по выполнению работы.

Тема 2.1. Производная функции.

Практическое занятие № 2: «Производная сложной функции»

Цели практической работы:

1.Закрепление теоретического материала по теме «Производная сложной функции».

2.Приобретение практических навыков по вычислению производной сложных функций.

3.Развитие умения действовать самостоятельно.

Краткая теория.

Производная сложной функции

Рассмотрим функцию F(x)= $\log_2(x^2+1)$. Эту функцию можно рассматривать как сложную функцию f(x)= $\log_2 y$, где y=g(x)= x^2+1,т.е. как функцию f(y), аргумент которой также является функцией y=g(x). Иными словами, сложная функция – это функция от функции F(x)=f(g(x)).Производная сложной функции находится по формуле т.е. по формулеF′(x) = f ′ (x)·g′(x), где y=g(x), т.е. по формуле:

$$f'(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$$

Примеры:

а) y=$(2x-5)^3$

$$y' = 3(2x-5)^2 \cdot (2x-5)' = 3(2x-5)^2 \cdot 2 = 6(2x-5)^2 .$$

б) y=$15\sqrt[5]{(3x-8)^4}$

$$y' = (15\sqrt[5]{(3x-8)^4})' = (15(3x-8)^{0,8})' = 15 \cdot 0.8(3x-5)^{0.8-1} \cdot (3x-5)' = 12(3x-8)^{-0,2} \cdot 3 = 36(3x-8)^{-0,2}$$ в)

y=$\left(\frac{x}{x+1}\right)^3$

$$y' = 3\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 \cdot \left(\frac{x}{x+1}\right)' = 3\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 \frac{x' \cdot (x+1) - x \cdot (x+1)'}{(x+1)^2} = 3\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 \frac{1 \cdot (x+1) - x \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{3x^2}{(x+1)^4}$$

г) y= ln (x^3-4x+1)

$$y' = \frac{1}{x^3-4x+1} \cdot (x^3-4x+1)' = \frac{3x^2-4}{x^3-4x+1}$$

ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

1. $(c)' = 0$ (c-cont)

2. $(x^{\alpha})' = \alpha\, x^{\alpha-1}$

3. $x' = 1$ 13. $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

4. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ 14. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

5. $(a^x)' = a^x \ln a$ 15. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

6. $(e^x)' = e^x$ 16. $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

7. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$ 17. $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

8. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ 18. $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$

9. $(\lg x)' = \dfrac{1}{x\ln 10}$ 19. $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

10. $(\sin x)' = \cos x$ 20. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$

11. $(\cos x)' = -\sin x$

12. $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

Вариант №1

Задание 1

Найти производную функции:

а) f(x)=$(2x+3)^2$ д) f(x)=$\frac{x^5}{\ln 4x}$

б) f(x)=$\sqrt{x^2-3}$ е) f(x)=$x^2 \cdot \log_5(2x+7)$

в) f(x)=sin2x ж) f(x)=$(2x^7-3x+5)^{-1}$

г) f(x)=5x+e^{3x} з) f(x)=$3^{2x}+14x^2-8$

Задание 2

Найти значение производной функции f(x) в точке x_0:

f(x)=e^{2x-4}

x_0=2

Задание 3

Найти производную функции:

f(x)=$\arcsin(1-3x) - arcctg(5x+\frac{\pi}{3})$

Задание 4

Решить неравенство $f'(x) \geq 0$,если:

f(x)=$(2x-9)^2$

Вариант №2

Задание 1

Найти производную функции:

а) f(x)= $(4x-5)^3$ д) f(x)= $\frac{\log_3 3x}{x}$

б) f(x)= e^{2x-4} е) f(x)= $\ln(x^4+3)\cdot x^4$

в) f(x)= cos(3x-4) ж) f(x)= $\sqrt[3]{(x+3)^2}$

г) f(x)= $x^2-\sqrt{4x}$ з) f(x)= $15x^4-8^{7x}$

Задание 2

Найти значение производной функции f(x) в точке x_0:

f(x)= e^{3x-2}

$x_0=\frac{2}{3}$

Задание 3

Найти производную функции:

f(x)=$e^{-2x}\cdot\log_2 x$

Задание 4

Решить неравенство $f'(x)\geq 0$,если:

f(x)=$e^{2x}-x$

Вариант №3

Задание 1

Найти производную функции:

а) f(x)= $(8x-9)^2$

б) f(x)= $\ln(x^3-2x)$

в) f(x)= tg5x

г) f(x)= $12+7^{3x}$

д) f(x)= $\frac{\sqrt{x}}{(x+3)^2}$

е) f(x)= $\log_3(x^4-5)\cdot x^7$

ж) f(x)= $(4x^3-3x^2+2)^{-3}$

з) f(x)= $e^{-5x}+3x^4-7$

Задание 2

Найти значение производной функции f(x) в точке x_0:

f(x)= 2^{x+3}

$x_0=1$

Задание 3

Вычислить:

f(x)=arctg $(2x+\frac{\pi}{4})$ – arccos $(3-5x)$

Задание 4

Решить неравенство $f'(x)\geq 0$,если:

f(x)= $e^x\cdot x^2$

Вариант №4

Задание 1

Найти производную функции:

а) f(x)= $(5x+3)^4$ д) f(x)= $\frac{e^{7x}}{x^4}$

б) f(x)= $\log_5(x^2+1)$ е) f(x)= $\sqrt{x^5}\cdot(x^7-2)$

в) f(x)= ctg(x^4-5) ж) f(x)= $(4x^9-3x+1)^{-2}$

г) f(x)= ln(9x+3)- x^3 з) f(x)= $8^{-5x}+15x^4$

Задание 2

Найти значение производной функции f(x) в точке x_0:

f(x)= $\log_2(x+5)$

$x_0=1$

Задание 3

Вычислить:

f(x)=$\frac{3^{-x}-\ln x}{5x+4}$

Задание 4

Решить неравенство $f'(x)\geq 0$,если:

f(x)= $e^{x+3}\cdot\sqrt{x}$

Вариант №5

Задание 1

Найти производную функции:

а) f(x)= $(18x+1)^3$

б) f(x)= 5^{3x-8}

в) f(x)= arcsin(x+2)

г) f(x)= $\log_3 x^4 - x^3$

д) f(x)= $\frac{\sin 2x}{x}$

е) f(x)= $\sqrt{3+x^4 \cdot 12x^2}$

ж) f(x)= $\sqrt[5]{(2x-9)^3}$

з) f(x)= $e^{12x} - 3x + 2$

Задание 2

Найти значение производной функции f(x) в точке x_0:

f(x)=ln ($x^2 - 3$)

x_0 = -1

Задание 3

Вычислить:

f(x)=$e^{5x} \cdot \log_5(4 - 3x)$

Задание 4

Решить неравенство $f'(x) \geq 0$,если:

f(x)=xln2- 2^{x+1}

Литература.

1. Учебник Н В. Богомолова “Математика. Среднее профессиональноеобразование”. Москва “Дрофа” 2012г.

2.Г.Н.Яковлев «Алгебра и начала анализа» часть 1. Москва издательство «Наука» 2011г.

3. Учебник В.Т.Лисичкина и И.Л.Соловейчика “Математика. Учебное пособие для техникумов”. Москва ”Высшая школа ” 2014г – 480 с.

4. Методические указания по выполнению работы.

Практическое занятие № 3: «Физический и геометрический смысл производной»

Цели практической работы:

1.Закрепление теоретического материала по теме «Производная сложной функции».

2.Приобретение практических навыков по вычислению производной сложных функций.

3.Развитие умения действовать самостоятельно.

Краткая теория.

Физический смысл производной.

Если S=S(t) – закон прямолинейного движения, то $S'(t)$ выражает скорость движения в момент времени t, т.е. $V = S'(t)$ (мгновенная скорость). Например, закон свободного падения тела выражается зависимостью $S = \frac{gt^2}{2}$. Тогда скорость падения в момент t такова: $V = S' = \left(\frac{gt^2}{2}\right)' = \frac{g}{2}(t^2)' = \frac{g}{2} \cdot 2t = gt.$

Вообще производная функции y=f(x) в точке x выражает скорость изменения функции в точке x, т.е. скорость протекания процесса, описываемого зависимостью y=f(x). В этом состоит физический смысл производной.

Пример 1. Прямолинейное движение точки задано уравнением s=$3t^2 - 2t + 5$(t выражено в секундах, а s–в метрах). Найти скорость движения точки в момент t=5.

V=$s' = (3t^2 - 2t + 5)' = 6t - 2.$ V(5)=6·5-2=28(м/с).

Пример 2. Сила тока I изменяется в зависимости от времени t по закону $I = 0{,}4t^2$ (I-в амперах, t-в секундах).Найти скорость изменения силы тока в конце 8-й секунды.

V=$I' = (0{,}4t^2)' = 0{,}8t$. V=0,8·8=6,4(А/с).

Пусть функция y=f(x) имеет производную $f'(x)$. Это новая функция, которая в свою очередь, может иметь производную. Производная функции $f'(x)$ называется второй производной функции y=f(x) и обозначается $f''(x)$.

Пусть s=s(t)-закон прямолинейного движения. Тогда вторая производная выражает скорость изменения скорости этого движения, т.е. ускорение a=$s''(t)$ В этом состоит физический смысл второй производной.

Пример 3. Прямолинейное движение точки задано уравнением s=$t^3 + 5t^2 + 4$. Найти скорость и ускорение в момент времени t=2.

$V = s' = (t^3 + 5t^2 + 4)' = 3t^2 + 10t$. V(2)=3$\cdot 2^2 + 10 \cdot 2 = 32$.

a= $s'' = (3t^2 + 10t)' = 6t + 10$. a(2)=6·2+10=22.

Геометрический смысл производной.

Графиком линейной функции y=kx+b является прямая. Число k=tgα называют угловым коэффициентом прямой, а угол α – углом между этой прямой и осью Ox.Если k>0, то 0<α<$\frac{\pi}{2}$ (рис. 1а); в этом случае функция возрастает и говорят, что прямая направлена вверх.Если k<0, то -$\frac{\pi}{2}$<α<0 в этом случае функция y=kx+b убывает и говорят, что прямая направлена вниз.

Выясним геометрический смысл производной дифференцируемой функции y=f(x). Пусть точки A и M принадлежат графику функции y=f(x). Пусть x и x+h – абсциссы точек A и M, тогда их ординаты равны f(x) и f(x+h). Из треугольника ACM, где C(x+h; f(x)), найдем угловой коэффициент k прямой AM, который зависит от h(его можно рассматривать как функцию от h и писать k(h)). Имеем k(h)=tgCAM=$\frac{MC}{AC}$, где MC=f(x+h) – f(x), AC=h, т.е. $k(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Пусть число x фиксировано, а h→0, тогда точка A неподвижна, а точка M, двигаясь по графику, стремится к точке A(рис. 2). При этом прямая AM стремится занять положение некоторой прямой, которую называют касательной к графику функции f(x), потому что $\lim\limits_{h \to 0} k(h)$ существует и равен $f'(x)$.Итак, $f'(x) = tg\alpha$.Геометрический смысл производной состоит в том, что значение производной функции в точке равно угловому коэффициенту касательной к графику функции в этой точке.

Уравнение касательной имеет вид: $y=f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

Пример 1. Найти угол, который образует с осью x касательная к графику функции $y = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin 3x$, проведенная в точке x=0.

$y' = \frac{1}{\sqrt{3}} \cos 3x \cdot 3 = \sqrt{3} \cos 3x$; x=0, $y'(0) = \sqrt{3}$ cos0=$\sqrt{3}$, k=tgα=$\sqrt{3}$, α=60^0.

Пример 2. Составить уравнение касательной к графику функции $f(x) = \sqrt{x}$ в точке x_0=4.

$f(x) = \sqrt{x}$,f(4)=$\sqrt{4} = 2$ $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$

Подставим в уравнение: $y=f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

$y=2+\frac{1}{4}(x-4)$, т.е. $y=\frac{1}{4}x+1$.

Вариант №1

Задание 1

Найти угловой коэффициент касательной к графику функции f(x) в точке с абсциссой x_0: f(x)= $x^3, x_0 = 1$

Задание 2

Найти угол между касательной к графику функции y=f(x) в точке с абсциссой x_0 и осью Ox.

f(x)=$\frac{1}{3}x^3$

x_0=1

Задание 3

Найти скорость и ускорение в указанные моменты времени для точки, движущейся прямолинейно, если движение задано уравнением:

S=$4t^3 - 3t$

t=2

Задание 4

Написать уравнение касательной к графику функции y=f(x) в точке с абсциссой x_0.

f(x)=lnx, x_0=1

Задание 5

Точка движется прямолинейно по закону x(t)=$2t^3 + t - 1$. В какой момент времени её ускорение будет равно1 см/c^2 ?

Вариант №2

Задание 1

Найти угловой коэффициент касательной к графику функции f(x) в точке с абсциссой x_0: f(x)= lnx, x_0=1

Задание 2

Найти угол между касательной к графику функции y=f(x) в точке с абсциссой x_0 и осью Ox.

f(x)= $2\sqrt{x}$

x_0=3

Задание 3

Найти скорость и ускорение в указанные моменты времени для точки, движущейся прямолинейно, если движение задано уравнением:

S= $2t^3 - t$ +4

t=1

Задание 4

Написать уравнение касательной к графику функции y=f(x) в точке с абсциссой x_0.

f(x)= $x^2 - 3x + 4$, x_0=1

Задание 5

Точка движется прямолинейно по закону x(t)= $2t^3 + t - 1$. В какой момент времени её ускорение будет равно 3 см/c^2 ?

Вариант №3

Задание 1

Найти угловой коэффициент касательной к графику функции f(x) в точке с абсциссой x_0: f(x)= e^x, x_0=2

Задание 2

Найти угол между касательной к графику функции y=f(x) в точке с абсциссой x_0 и осью Ox.

f(x)=$\frac{1}{x}$

x_0=1

Задание 3

Найти скорость и ускорение в указанные моменты времени для точки, движущейся прямолинейно, если движение задано уравнением:

S=t^3+5t^2+4

t=2

Задание 4

Написать уравнение касательной к графику функции y=f(x) в точке с абсциссой x_0.

f(x)= x^3+2x-1, x_0=0

Задание 5

Точка движется прямолинейно по закону x(t)=$2t^3+t-1$. В какой момент времени её ускорение будет равно 7 см/c^2 ?

Вариант №4

Задание 1

Найти угловой коэффициент касательной к графику функции f(x) в точке с абсциссой x_0: f(x)= x^4, x_0 = - 2

Задание 2

Найти угол между касательной к графику функции y=f(x) в точке с абсциссой x_0 и осью Ox.

f(x)= x^3

x_0 =0

Задание 3

Найти скорость и ускорение в указанные моменты времени для точки, движущейся прямолинейно, если движение задано уравнением:

S= $t^3 - 8t$

t=3

Задание 4

Написать уравнение касательной к графику функции y=f(x) в точке с абсциссой x_0.

f(x)=sinx, $x_0 = \frac{\pi}{4}$

Задание 5

Точка движется прямолинейно по закону x(t)= $2t^3 + t - 1$. В какой момент времени её ускорение будет равно 13 см/c^2 ?

Литература.

1. Учебник Н В. Богомолова “Математика. Среднее профессиональноеобразование”. Москва “Дрофа” 2012г.

2.Г.Н.Яковлев «Алгебра и начала анализа» часть 1. Москва издательство «Наука» 2011г.

3. Учебник В.Т.Лисичкина и И.Л.Соловейчика “Математика. Учебное пособие для техникумов”. Москва ”Высшая школа ” 2014г – 480 с.

5. Н.Б. Богомолова «Практическое занятие по математике», Москва, «Высшая школа», 2013 г.

Практическое занятие № 4: «Построение графика функции с помощью производной»

Цели практической работы:

1. Повторение, обобщение и систематизирование знаний по теме «Исследование функции с помощью производной»;

2. Формирование практических навыков и умений исследования функции, построения их графиков с помощью производных, развитие навыков самостоятельной работы.

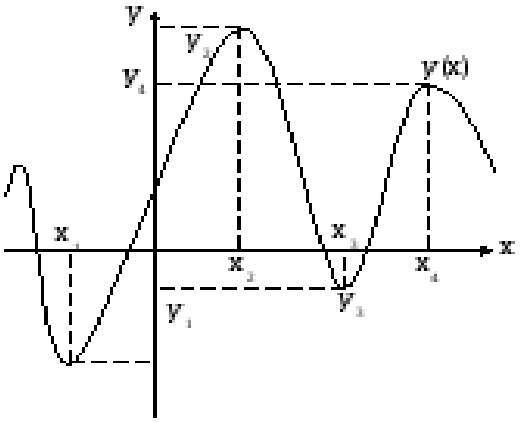
3.Развитие умения действовать самостоятельно.

Краткая теория.

При построении графиков функции очень важно уметь находить промежутки возрастания, убывания и постоянства функции, или же, иными словами, промежутки ее монотонности.

Теорема (признак монотонности функции). Для того чтобы дифференцируемая на интервале функция возрастала (убывала) на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы ее производная была во всех точках интервала неотрицательна (неположительна). Если производная функция во всех точках интервала положительна (отрицательна), то функция строго возрастает (строго убывает).

Важной характеристикой функции и ее графика являются экстремумы. Экстремумом функции называется максимальное (минимальное) значение функции на заданном множестве. Точка, в которой достигается экстремум, называется точкой экстремума.



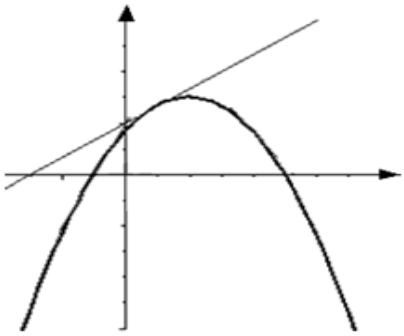
(рис. 1)

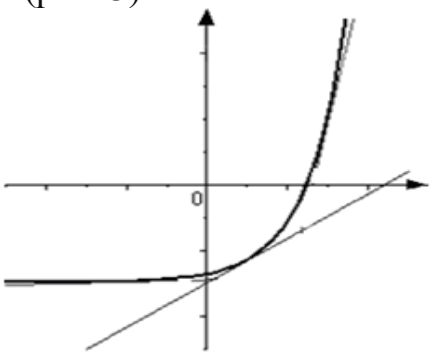
x_1, x_2, x_3, x_4 – критические точки, y_1, y_2, y_3, y_4 – экстремумы функции, причем:
y_2, y_4 – максимумы функции, y_1, y_3, – минимумы функции
Точка x_o называется точкой максимума функции $y = f(x)$, если для всех $x \neq x_0$ некоторой окрестности этой точки выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

Точка x_o называется точкой минимума функции $y = f(x)$, если для всех $x \neq x_0$из некоторой окрестности этой точки выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.

График функции $y = f(x)$, дифференцируемой на интервале $(a; b)$, является на этом интервале **выпуклым**, если график этой функции в пределах интервала $(a; b)$лежит не выше любой своей касательной (рис. 2).

График функции $y = f(x)$, дифференцируемой на интервале $(a; b)$, является на этом интервале **вогнутым**, если график этой функции в пределах интервала $(a; b)$лежит не ниже любой своей касательной (рис. 3).





(рис. 2) (рис. 3)

Точками перегиба графика функции называются точки, в которых график меняет характер выпуклости.
Общая схема исследования функции и построения графика:
1. Найти область определения функции.
2. Найти область значений функции.
3. Определить четность, нечетность.
4. Определить нули функции.
5. Определить периодичность функции.
6. Определить интервалы монотонности и экстремумы функции.
7. Определить интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции.
8. Построить график функции.

Вариант №1

Задание 1

Найдите критические точки функции $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 7$

Задание 2

Найдите промежутки монотонности функции $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x}$

Задание 3

Найдите точки экстремума функции $f(x) = x^5 - 15x^3 + 8$

Задание 4

Исследуйте функцию на выпуклость
$f(x) = x^4 - 4x^3 - 18x^2 + x - 3$

Задание 5

Исследуйте функцию и постройте ее график
$y = x^4 - 4x^3 + 2$

Вариант №2

Задание 1

Найдите критические точки функции $f(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 1$

Задание 2

Найдите промежутки монотонности функции
$f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 1$

Задание 3

Найдите точки экстремума функции $f(x) = \frac{x^2-3}{x-2}$

Задание 4

Исследуйте функцию на выпуклость$f(x) = \frac{x^6}{30} - 3x^4$

Задание 5

Исследуйте функцию и постройте ее график $y = (x^2 - 1)^3$

Вариант №3

Задание 1

Найдите критические точки функции $f(x) = \cos 2x - \sqrt{3}x + \frac{\pi}{4}$

Задание 2

Найдите промежутки монотонности функции
$f(x) = 3 + 24x - 3x^2 - x^3$

Задание 3

Найдите точки экстремума функции $f(x) = \frac{x^2+3}{x+1}$

Задание 4

Исследуйте функцию на выпуклость$f(x) = \sin 2x - x^2$

Задание 5

Исследуйте функцию и постройте ее график $y = x^2 - \frac{2}{x}$

Вариант №4

Задание 1

Найдите критические точки функции $f(x) = \sin\frac{x}{2} + \frac{x}{2\sqrt{2}} - \pi$

Задание 2

Найдите промежутки монотонности функции
$f(x) = \sqrt{4x - x^2}$

Задание 3

Найдите точки экстремума функции $f(x) = 35x^7 - x^5 + 1$

Задание 4

Исследуйте функцию на выпуклость $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 5x + 3$

Задание 5

Исследуйте функцию и постройте ее график $y = \frac{x^3+1}{x^2}$

Вариант №5

Задание 1

Найдите критические точки функции $f(x) = 3x^3 + 6x^2 - 12$

Задание 2

Найдите промежутки монотонности функции
$f(x) = 4x^2 - x^4$

Задание 3

Найдите точки экстремума функции $f(x) = x^3 - 3x$

Задание 4

Исследуйте функцию на выпуклость $f(x) = 2x^6 - 5x^4$

Задание 5

Исследуйте функцию и постройте ее график $y = \frac{7x}{2x^2-3x-2}$

Вариант №6

Задание 1

Найдите критические точки функции $f(x) = 12x - x^3 + 5$

Задание 2

Найдите промежутки монотонности функции $f(x) = x + \frac{4}{x}$

Задание 3

Найдите точки экстремума функции $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3$

Задание 4

Исследуйте функцию на выпуклость $f(x) = \cos 2x + x^2$

Задание 5

Исследуйте функцию и постройте ее график $y = \frac{16}{x^3 - 4x}$

Литература.

1. Учебник Н В. Богомолова “Математика. Среднее профессиональноеобразование”. Москва “Дрофа” 2012г.

2.Г.Н.Яковлев «Алгебра и начала анализа» часть 1. Москва издательство «Наука» 2011г.

3. Учебник В.Т.Лисичкина и И.Л.Соловейчика “Математика. Учебное пособие для техникумов”. Москва ”Высшая школа ” 2014г – 480 с.

4. Методические указания по выполнению работы.

Практическое занятие № 5: «Метод непосредственного интегрирования»

Цели практической работы:

1. Закрепление теоретического материала по теме «Неопределенный интеграл и его свойства. Непосредственное интегрирование».
2. Приобретение практических навыков по вычислению неопределенных интегралов.
3. Развитие умения действовать самостоятельно.

Краткая теория.

Первообразная и неопределенный интеграл.

Основная задача дифференциального исчисления заключается в следующем: дана функция F(x), требуется найти её производную. При этом, если производная существует в каждой точке x некоторого промежутка X, то это также некоторая функция f(x) на X такая, что f(x)= $F'(x)$.

Однако часто приходится решать и обратную задачу: дана функция f(x), требуется найти функцию F(x) такую, что

$F'(x)$ =f(x). (1)

Для решения обратной задачи служит операция *интегрирования,* обратная операции дифференцирования.

Определение 1. Дифференцируемая функция F(x), определенная на некотором промежутке X, называется первообразной для функции f(x), определенной на том же промежутке, если для всех x из этого промежутка $F'(x)$ =f(x), или, что то же самое,

$$dF(x)=f(x)dx \qquad (2)$$

Пример 1.Найтипервообразную для функции f(x)=$3x^2$.

Функция F(x)= x^3 является первообразной для f(x)=$3x^2$, так как

$F'(x) = (x^3)' = 3x^2 = f(x)$.

Нетрудно заметить, что первообразная x^3 не является единственной для функции $3x^2$. В самом деле, в качестве первообразной можно было взять и функции: x^3 +5, x^3 −2 и вообще x^3 +C, где C-произвольная постоянная, потому что $(x^3 + C)' = 3x^2$.

Теорема 1. Если функция F(x) есть первообразная для функции f(x) на некотором промежутке X, то функция

$$F(x)+C, \qquad (3)$$

где С-произвольная постоянная, также является первообразной для f(x) на том же промежутке, причем любая другая первообразная Ф(x) функции f(x) на этом промежутке может быть записана в виде

$$\Phi(x)=F(x)+C. \qquad (4)$$

Определение 2. Совокупность всех первообразных для функции f(x) , определенных на некотором промежутке X, называется неопределенным интегралом от функции f(x) на этом промежутке и обозначается символом $\int f(x)\,dx$.

Если F(x) является первообразнойдля функции f(x) на промежутке X ,то согласно определению 2 имеем

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C. \qquad (5)$$

Определение 3. Функция f(x) называется подынтегральной функцией, f(x) dx- подынтегральным выражением, x-переменной интегрирования, символ $\int$ - знаком неопределенного интеграла, C - постоянной интегрирования.

Пример 2. Найти $\int x^5 dx.$

Так как $x^5=\left(\frac{x^6}{6}\right)'$,то функция F(x)=$\frac{x^6}{6}$ является одной из первообразных для функции f(x)= x^5. Поэтому $\int x^5 dx.=\frac{x^6}{6}$+C.

Основные свойства неопределенного интеграла.

Непосредственно из равенств (1) и (5) следуют свойства:

1. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции.
$$(\int(x)dx)'=(F(x)+C)'=F'(x)=f(x).$$

2. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению.
$$d\int f(x)dx=(\int f(x)dx)'dx=f(x)dx.$$

3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная.
$$\int dF(x)=\int F'(x)dx=\int f(x)dx=F(x)+C.$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т.е. если a=const≠0, то
$$\int af(x)dx=a\int f(x)dx.$$

5. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы двух непрерывных функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций в отдельности, т.е.
$$\int(f(x)\pm g(x))dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx.$$

Таблица неопределенных интегралов.

1. $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C(\alpha \neq -1); при \alpha = 0 имеем \int dx = x + C$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

3. $\int \sin xdx = -\cos xdx + C.$

4. $\int \cos xdx = \sin x + C.$

5. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C.$

6. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} =$ -ctgx+C.

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$

8. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C.$

9. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$

10. $\int e^x dx = e^x + C.$

11. $\int tgxdx = -\ln|\cos x| + C.$

12. $\int ctgxdx = \ln|\sin x| + C.$

Непосредственное интегрирование.

Под непосредственным интегрированием понимают такой способ интегрирования, при котором данный интеграл путём тождественных преобразований подынтегральной функции и применения свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам.

Примеры:

1) $\int x^6 dx = \frac{x^7}{7} + C.$

2) $\int 5{,}4x^5 dx = 5{,}4 \cdot \frac{x^6}{6} + C = \frac{5{,}4x^6}{6} + C = 0{,}9x^6 + C.$

3) $\int (x^9+5x-3)dx = \int x^9 dx + \int 5x dx - \int 3dx = \frac{x^{10}}{10} + 5\cdot\frac{x^2}{2} - 3x + C = \frac{x^{10}}{10} + 2{,}5x^2 - 3x + C.$

4) $\int \frac{7x^4+5x^2}{x^2}dx = \int \frac{x^2(7x^2+5)}{x^2}dx = \int (7x^2+5)dx = \int 7x^2 dx + \int 5dx = 7\cdot\frac{x^3}{3} + 5x + C = \frac{7x^3}{3} + 5x + C.$

5) $\int x^5\sqrt{x}dx = \int x^{5,5}dx = \frac{x^{6,5}}{6{,}5} + C$.

6) $\int \sin 5x dx = -\frac{1}{5}\cos 5x + C.$

7) $\int (3^x\cdot 8^x)dx = \int 24^x dx = \frac{24^x}{\ln 24} + C.$

8) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9(\frac{1}{9}-x^2)}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 - x^2}} = \frac{1}{3}\arcsin\frac{x}{\frac{1}{3}} + C = \frac{1}{3}\arcsin 3x + C.$

Вариант №1

Задание 1

Найти первообразную для функций f(x):

а) f(x)= x^5

б) f(x)= $2x^{-9}+5$

в) f(x)= 5^{x+3}

г) f(x)=sin3x

д) f(x)= $8ctgx+x^8$

е) f(x)= $\frac{1}{x}-3x^{-5}$

Задание 2

Вычислить интегралы:

а) $\int x^7 dx$

б) $\int x^7\sqrt{x}dx$

в) $\int 5^x dx$

г) ∫2cosxdx

д) $\int 7{,}2e^x dx$

е) $\int (e^x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})dx$

ж) $\int (3x^2-4x+5)dx$

з) $\int \frac{x^2-25}{x-5}dx$

и) $\int (x^2-3)dx$

к) ∫sin2xdx

л) $\int 3^x\cdot 4^{2x}dx$

Вариант №2

Задание 1

Найти первообразную для функций f(x):

а) f(x)= x^{-7}

б) f(x)= $3x^4+18$

в) f(x)= e^{x-8}

г) f(x)=cos5x

д) f(x)=4tgx+ x^5

е) f(x)= $\frac{1}{\sin^2 x}+5{,}1x^2$

Задание 2

Вычислить интегралы:

а) $\int x^5 dx$

б) $\int x^7 \cdot \sqrt[3]{x} dx$

в) $\int 4^x dx$

г) ∫3sinxdx

д) $\int 3e^x dx$

е) $\int (\cos x - \frac{1}{\sin^2 x})dx$

ж) $\int (8x^3-3x^2+5)dx$

з) $\int \frac{x^2-36}{x+6}dx$

и) $\int (x^3+5)dx$

к) ∫cos4xdx

л) $\int e^{3x} \cdot e^{6x} dx$

Вариант №3

Задание 1

Найти первообразную для функций f(x):

а) f(x)= $2x^{11}$

б) f(x)= $x^{-4}-9$

в) f(x)= 4^{x+2}

г) f(x)= e^{9x}

д) f(x)=5sinx+12x

е) f(x)= $\frac{1}{1+x^2}-3x$

Задание 2

Вычислить интегралы:

а) $\int x^9 dx$

б) $\int x^4 \cdot \sqrt[5]{x} dx$

в) $\int 8^x dx$

г) ∫4tgxdx

д) $\int 12 e^x dx$

е) $\int (x^4-8)dx$

ж) $\int (4x^4-5x^2-2)dx$

з) $\int \frac{2x^2-4x}{x} dx$

и) $\int (tgx+5^x)dx$

к) ∫tg5xdx

л) $\int \frac{dx}{25+4x^2}$

Вариант №4

Задание 1

Найти первообразную для функций f(x):

а) f(x)= $4x^5$ г) f(x)=tg4x

б) f(x)= $x^{-3}-8$ д) f(x)=2sinx- x^9

в) f(x)= 9^{x+1} е) f(x)= $\frac{1}{x}-5\sin x$

Задание 2

Вычислить интегралы:

а) $\int x^{11}dx$ ж) $\int(12x^7-5x^4+7)dx$

б) $\int x^8\cdot\sqrt[9]{x}dx$ з) $\int\frac{x^2+3x}{x}dx$

в) $\int 12^x dx$ и) $\int(\frac{1}{x}-ctgx)dx$

г) ∫0,7cosxdxк) $\int\frac{dx}{\sin^2 x}$

д) ∫6,3 e^x л) $\int\frac{(2+x)dx}{x}$

е)$\int(x^5-36)dx$

Вариант №5

Задание 1

Найти первообразную для функций f(x):

а) f(x)= $-3\,x^8$

б) f(x)= $x^{-5}+12$

в) f(x)= e^{x+12}

г) f(x)= $(3x-4)^5$

д) f(x)= 3cosx-9x

е) f(x)= $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+x^4$

Задание 2

Вычислить интегралы:

а) $\int x^8 dx$

б) $\int x^2\cdot\sqrt[7]{x}dx$

в) $\int 9^x dx$

г) ∫8ctgxdx

д) $\int 18\,e^x dx$

е) $\int (x^6+12)dx$

ж) $\int (3x^8-5x^5+14)dx$

з) $\int \frac{x^2-81}{x+9}dx$

и) $\int\left((\sin x+\frac{1}{1+x^2}\right)dx$

к) ∫ctg7xdx

л) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$

Литература.

1. Учебник Н В. Богомолова “Математика. Среднее профессиональноеобразование”. Москва “Дрофа” 2012г.

2.Г.Н.Яковлев «Алгебра и начала анализа» часть 1. Москва издательство «Наука» 2011г.

3. Учебник В.Т.Лисичкина и И.Л.Соловейчика “Математика. Учебное пособие для техникумов”. Москва ”Высшая школа ” 2014г – 480 с.

4. Методические указания по выполнению работы.

5. Н.Б. Богомолова «Практическое занятие по математике», Москва, «Высшая школа», 2013 г

Практическое занятие № 6: «Интегрирование методом замены переменной»

Цели практической работы:

1. Закрепление знаний, формирование представлений об интегрировании методом замены переменной.

2. Формирование практических навыков и умений применять метод замены переменной при нахождении интегралов, развитие навыков самостоятельной работы.

Краткая теория.

Во многих случаях введение новой переменной интегрирования позволяет свести нахождение данного интеграла к нахождению табличного интеграла, т.е. перейти к непосредственному интегрированию. Такой подход называется методом подстановки или методом замены переменной.

Теорема. Пусть функция x = φ(t) определена и дифференцируема на некотором промежутке T и пусть X – множество значений этой функции, на котором определена функция *f*(x). Тогда, если на множестве X функция *f*(x). имеет первообразную, то на множестве T справедлива формула

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt \qquad (1)$$

Формула (1) – *формула замены переменной* в неопределённом интеграле.

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{x^6}{x^7 - 5} dx$.

Решение. Пусть $t = x^7 - 5$. Тогда $dt = 7x^6 dx$. Используя формулу (1) и табличный интеграл, получим:

$$\int \frac{x^6}{x^7 - 5} dx = \frac{1}{7} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{7} \ln|t| + C = \frac{1}{7} \ln\left|x^7 - 5\right| + C.$$

Вариант №1

Задание 1

Вычислить интегралы с помощью метода замены переменной:

1. $\int (3x+2)^5 dx$
2. $\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^3}$
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$
4. $\int sin^3 x \cos x\, dx$
5. $\int \left(\frac{\operatorname{arcctg}^4 7x}{1+49x^2} - \frac{x}{\sqrt{4-x^4}} \right) dx$
6. $\int x \cdot \sin(x) dx$

Вариант №2

Задание 1

Вычислить интегралы с помощью метода замены переменной:

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x-1}}$
2. $\int (2x^3+1)^4 x^2 dx$
3. $\int \frac{e^{arctg\ x}\, dx}{1+x^2}$
4. $\int \frac{x\ dx}{\sqrt[3]{3x+1}}$
5. $\int \left(\sqrt{1+3x} + \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x+1}} \right) dx$
6. $\int x \cdot \sin(3x) dx$

Вариант №3

Задание 1

Вычислить интегралы с помощью метода замены переменной:

1. $\int \frac{\sin x dx}{3-\cos x}$
2. $\int \frac{x dx}{(x^2+1)^3}$
3. $\int \frac{\sin 3x}{cos^3 3x} dx$
4. $\int x\sqrt{x+1} dx$
5. $\int \left(\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin^4 x} \right) dx$
6. $\int x \cdot arctg(x) dx$

Вариант №4

Задание 1

Вычислить интегралы с помощью метода замены переменной:

1. $\int \frac{x^2 dx}{5x^3+1}$
2. $\int \frac{e^x}{(7-e^x)^2} dx$
3. $\int tg\ 5x\ dx$
4. $\int x\sqrt{x-1}dx$
5. $\int\left(e^{-x^5} x^4 + \sqrt{7-\sin 5x}\cos 5x\right)dx$
6. $\int (x+3)\cdot 3^x dx$

Вариант №5

Задание 1

Вычислить интегралы с помощью метода замены переменной:

1. $\int \frac{arctg\ \ x\ dx}{x^2+1}$
2. $\int \frac{x\ dx}{\sqrt[3]{x^2-1}}$
3. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$
4. $\int ctg\ x\ dx$
5. $\int \left(5^{1-3x^2} \cdot x + \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{\mathrm{ctg}^3 4x}{\sin^2 4x}\right)dx$
6. $\int x \cdot \ln(x)dx$

Вариант №6

Задание 1

Вычислить интегралы с помощью метода замены переменной:

1. $\int \sqrt{3+x}dx$
2. $\int \frac{dx}{x\ ln^2 x}$
3. $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$
4. $\int \frac{x\ dx}{4x^2+7}$
5. $\int\left(\frac{\arcsin x + x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{5-6x}}\right)dx$
6. $\int e^x \cdot \cos(x)dx$

Литература.

1. Учебник Н В. Богомолова “Математика. Среднее профессиональноеобразование”. Москва “Дрофа” 2012г.

2.Г.Н.Яковлев «Алгебра и начала анализа» часть 1. Москва издательство «Наука» 2011г.

3. Учебник В.Т.Лисичкина и И.Л.Соловейчика “Математика. Учебное пособие для техникумов”. Москва ”Высшая школа ” 2014г – 480 с.

4. Методические указания по выполнению работы.

5. Н.Б. Богомолова «Практическое занятие по математике», Москва, «Высшая школа», 2013 г

Практическое занятие № 7: «Вычисление простейших определенных интегралов»

Цели практической работы:

1. Систематизировать практические и теоретические знания, выработать умение находить определенные интегралы.

2. Формирование практических навыков и умений вычислять простейшие определенные интегралы, развитие навыков самостоятельной работы.

Краткая теория.

В общем виде определенный интеграл записывается так$\int_b^a f(x)dx,$ где $a -$ это нижний предел, a b - верхний предел. Отрезок [a;b] называется отрезком интегрирования.
У определенного интеграла есть геометрический смысл. Самая популярная задача – вычисление площади с помощью определенного интеграла.
Решить определенный интеграл – это значит, найти число.
Решение определенных интегралов:

$$\int_a^b f(x)dx = F(X)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

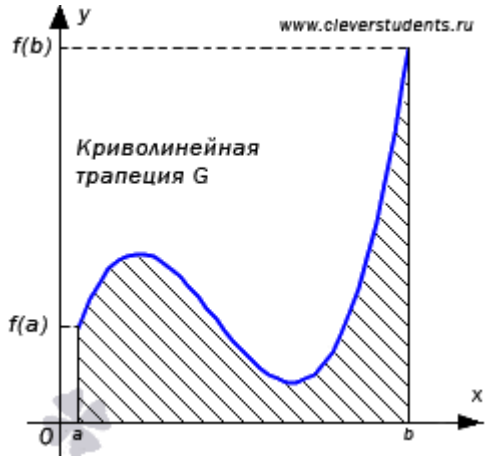
Сначала находим первообразную функцию (неопределенный интеграл). Обратите внимание, что константа в определенном интеграле не добавляется. Подставляем значение верхнего предела в первообразную функцию: F(b). Затем подставляем значение нижнего предела в первообразную функцию:F(a). Рассчитываем разностьF(b)−F(a), то есть, находим число.

Геометрический смысл определенного интеграла.

Определенный интеграл от неотрицательной функции численно равен площади криволинейной трапеции.

Физический смысл определенного интеграла.

Пусть материальная точка M движется вдоль числовой оси со скоростью V(t), V(t)≥0.Тогда путь, пройденный точкой за промежуток времени от t = a до t = b, равен определенному интегралу от скорости:$S = \int_a^b V(t)dt$.

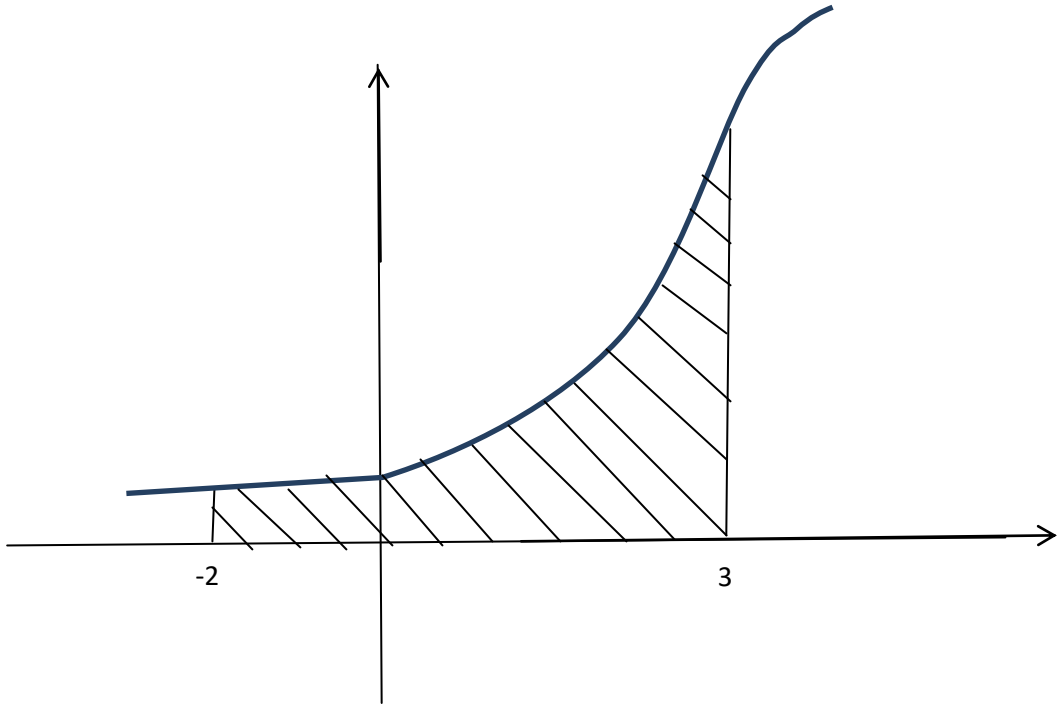


Примеры.

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$y = 2 \cdot e^{\frac{x}{3}}, y = 0, x = -2, x = 3$

Построим фигуру на плоскости: прямая y = 0 совпадает с осью абсцисс, прямые x = -2 и x = 3 параллельны оси ординат, а кривая $2 \cdot e^{\frac{x}{3}}$ может быть построена с помощью геометрических преобразований графика функции $y = e^x$



Таким образом, нам требуется найти площадь криволинейной трапеции. Геометрический смысл определенного интеграла нам указывает на то, что искомая площадь выражается определенным интегралом. Следовательно, $S(G) = \int_{-2}^{3} 2 \cdot e^{\frac{x}{3}} dx$. Этот определенный интеграл можно вычислить по формуле Ньютона-Лейбница:

$$S(G) = \int_{-2}^{3} 2 \cdot e^{\frac{x}{3}} dx = \left(6 \cdot e^{\frac{x}{3}}\right)\Big|_{-2}^{3} = 6 \cdot e^{\frac{3}{3}} - 6 \cdot e^{\frac{-2}{3}} = 6(e - e^{\frac{-2}{3}})$$

2.

$$\int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

Вариант №1

Задание 1

Вычислите определенный интеграл:

а) $\int_{-1}^{2}(3x^2-2x+1)dx$в) $\int_{0}^{8}\frac{1}{2\sqrt{x+1}}dx$

б) $\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{cos^2 3x}dx$г) $\int_{1}^{32}x^{\frac{3}{5}}dx$

Задание 2

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями
$y = x^2 - 6x+5$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$.

Вариант №2

Задание 1

Вычислите определенный интеграл:

а) $\int_1^3 \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) dx$в) $\int_2^4 e^{0,5x+3} dx$

б) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 21\cos(3x - \frac{\pi}{6}) dx$ г) $\int_1^8 (x^{\frac{2}{3}} + 1) dx$

Задание 2

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями
$y = x^2$,$y = x^{-1}$, $y = e$.

Вариант №3

Задание 1

Вычислите определенный интеграл:

а) $\int_{-2}^{1}(-3x^2-4x+2)dx$в) $\int_{1}^{2}\frac{-2}{(x-3)^2}dx$

б) $\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{sin^2 2x}dx$ г) $\int_{1}^{16}x^{0,25}dx$

Задание 2

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями
$y = -x^2 + 6x - 5$, $y = 0$,$x = 1$, $x=3$.

Вариант №4

Задание 1

Вычислите определенный интеграл:

а) $\int_1^4 \left(3 + \frac{4}{\sqrt{x}}\right) dx$в) $\int_1^2 3e^{4-x} dx$

б) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 5\sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})dx$ г) $\int_8^{27} (x^{-\frac{1}{3}} - 1)dx$

Задание 2

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями
$y = x^3$, $y = x^{-1}$, $y = e$.

Литература.

1. Учебник Н В. Богомолова “Математика. Среднее профессиональноеобразование”. Москва “Дрофа” 2012г.

2.Г.Н.Яковлев «Алгебра и начала анализа» часть 1. Москва издательство «Наука» 2011г.

3. Учебник В.Т.Лисичкина и И.Л.Соловейчика“Математика. Учебное пособие для техникумов”. Москва ”Высшая школа ” 2014г – 480 с.

4. Методические указания по выполнению работы.

Практическое занятие № 8: «Дифференциальные уравнения I-го порядка с разделяющимися переменными»

Цели практической работы:

1. Систематизировать практические и теоретические знания, выработать умение решать дифференциальные уравнения I-го порядка с разделяющимися переменными.

2. Развитие навыков самостоятельной работы.

Краткая теория.

Определение.

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее между собой независимую переменную x, искомую функцию y и ее производные или дифференциалы.

$F(x, y, y') = 0$, $F(x, y, y', \dots, y^{n}) = 0$.

Дифференциальное уравнение называется обыкновенным, если искомая функция зависит от одного независимого переменного.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной (или дифференциала), входящей в данное уравнение.

Решением (или интегралом) дифференциального уравнения называется такая функция, которая обращает это уравнение в тождество.

Общим решением (или общим интегралом) дифференциального уравнения называется такое решение, в которое входит столько независимых произвольных постоянных, каков порядок уравнения. Так, общее решение дифференциального уравнения первого порядка содержит одну произвольную постоянную.

Частным решением дифференциального уравнения называется решение, полученное из общего при различных числовых значениях произвольных постоянных. Значения произвольных постоянных находятся при определенных начальных значениях аргумента и функции.

График частного решения дифференциального уравнения называется интегральной кривой.Общему решению дифференциального уравнения соответствует совокупность (семейство) всех интегральных кривых.

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение, в которое входят производные (или дифференциалы)не выше первого порядка.

Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение вида $\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$

Для решения этого уравнения нужно сначала разделить переменные:

$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$, а затем проинтегрировать обе части полученного равенства: $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$.

Пример.

Решите уравнение: $x^2(y+1)dx+(x^3-1)(y - 1)dy = 0$

Решение.

$$\frac{x^2}{x^3-1}dx + \frac{y-1}{y+1}dy = 0; \quad x^3 - 1 \neq 0; y + 1 \neq 0$$

Интегрируя, получаем:

$$\frac{1}{3}\ln\left|x^3-1\right| + y - 2\ln\left|y+1\right| = C$$

Далее из уравнений $x^3 - 1 = 0$ и $y + 1 = 0$ находим $x = 1$, $y = -1$. Эти решения – частные решения.

Вариант 1

Задание 1

Найти общее решение Д.У. 1 порядка:

$$\frac{dy}{dx} - 2y - 3 = 0$$

Задание 2

Найти частное решение Д.У. 1 порядка:

$$(1 - y)dx + (1 + x)\,dy = 0,$$

если при $x = 1, y = 3$.

Задание 3

Написать уравнение кривой, проходящей через точку А(0;1), если угловой коэффициент касательной равен k= $3x^2 + 1$.

Задание 4

Написать закон движения, если скорость тела равна v(t) = 2t -$3t^2$, а s(2)= 10 м.

Задание 5

Составить уравнение скорости движения, если ускорение тела изменяется по закону a(t) = 1+ 4t – $3t^2$, а через t=1с v(1)= 6 м/с.

Вариант 2

Задание 1

Найти общее решение Д.У. 1 порядка:

$$\frac{dy}{dx} = \text{y} + 1$$

Задание 2

Найти частное решение Д.У. 1 порядка:

$$(1 + x^2)dy = xydx \ ,$$

если при $x = 0, \text{y} = 1$.

Задание 3

Написать уравнение кривой, проходящей через точкуВ(0;2), если угловой коэффициент касательной равен k= $2x^2 - 2$.

Задание 4

Написать закон движения, если скорость тела равна v(t) = $3t^2$+ 2t +1, а через 2с тело прошло 14 м.

Задание 5

Составить уравнение скорости движения, если ускорение тела изменяется по закону a(t) = 4t - $6t^2$, а через t = 1с скорость равна 5 м/с.

Вариант 3

Задание 1

Найти общее решение Д.У. 1 порядка:

$$\frac{dy}{dx} + xy = x$$

Задание 2

Найти частное решение Д.У. 1 порядка:

$$(x-1)ydx + x\,dy = 0,$$

если при $x = 1, \mathrm{y} = 1$.

Задание 3

Написать уравнение кривой, проходящей через точкуС(0;2), если угловой коэффициент касательной равен k= $x^2 + 2$.

Задание 4

Написать закон движения, если скорость тела равна v(t) = $3t^2$- 2t , а s(2)= 6 м.

Задание 5

Составить уравнение скорости движения, если ускорение тела изменяется по закону a(t) = $3t^2$+4t -2, а через t=1с скорость равна 3 м/с.

Вариант 4

Задание 1

Найти общее решение Д.У. 1 порядка:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x+1} = 0$$

Задание 2

Найти частное решение Д.У. 1 порядка:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = \frac{1}{x^2},$$

если при $x = 2, \mathrm{y} = 1$.

Задание 3

Написать уравнение кривой, проходящей через точкуС(1;1), если угловой коэффициент касательной равен k= $6x^2 - 1$.

Задание 4

Написать закон движения, если скорость тела равна v(t) = $9t^2$- t +1, а через 2с тело прошло 8 м.

Задание 5

Составить уравнение скорости движения, если ускорение тела изменяется по закону a(t) = $3t^2$- 4t +1, а через t=1с скорость равна 4 м/с.

Вариант 5

Задание 1

Найти общее решение Д.У. 1 порядка:

$$\frac{dy}{dx} = 2\text{y} - 3$$

Задание 2

Найти частное решение Д.У. 1 порядка:

$$(2 + \text{y})dx + (1 - x)\,dy = 0,$$

если при $x = 1, \text{y} = 4$.

Задание 3

Написать уравнение кривой, проходящей через точкуА(0;1), если угловой коэффициент касательной равен k= $2x^2 - 2$.

Задание 4

Написать закон движения, если скорость тела равна v(t) = $9t^2$- 2t +1, а s(1)= 5 м.

Задание 5

Составить уравнение скорости движения, если ускорение тела изменяется по закону a(t) = 2+ 2t – $3t^2$, а через t=1с v(1)= 6 м/с.

Вариант 6

Задание 1

Найти общее решение Д.У. 1 порядка:

$$\frac{dy}{dx} - 2y + 5 = 0$$

Задание 2

Найти частное решение Д.У. 1 порядка:

$$(1 + x^2)dy = xydx ,$$

если при $x = 0, y = 3$.

Задание 3

Написать уравнение кривой, проходящей через точкуА(1;1), если угловой коэффициент касательной равен k= $3x^2 - 2$.

Задание 4

Написать закон движения, если скорость тела равна v(t) = $6t^2$+ 2t - 4, а через 1с тело прошло 6 м.

Задание 5

Составить уравнение скорости движения, если ускорение тела изменяется по закону a(t) = 2t + $3t^2$, а через t = 1с скорость равна 5 м/с.

Вариант 7

Задание 1

Найти общее решение Д.У. 1 порядка:

$$\frac{dy}{dx} = xy - x$$

Задание 2

Найти частное решение Д.У. 1 порядка:

$$(x-1)ydx + x\,dy = 0,$$

если при $x = 1, \mathrm{y} = 2$.

Задание 3

Написать уравнение кривой, проходящей через точкуА(0;1), если угловой коэффициент касательной равен k= $x^2 - 2$.

Задание 4

Написать закон движения, если скорость тела равна v(t) = $3t^2$+ 4t +1, а s(1)= 7 м.

Задание 5

Составить уравнение скорости движения, если ускорение тела изменяется по закону a(t) = $6t^2$+ 2t -1, а через t=1с v(1)= 5 м/с.

Вариант 8

Задание 1

Найти общее решение Д.У. 1 порядка:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{2x^2 - 1}$$

Задание 2

Найти частное решение Д.У. 1 порядка:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{4y}{x+2} = 0,$$

если при $x = 1, \mathrm{y} = 4$.

Задание 3

Написать уравнение кривой, проходящей через точку C(0;5), если угловой коэффициент касательной равен k = $4x - 2$.

Задание 4

Написать закон движения, если скорость тела равна v(t) = $6t^2$- 4t -2, а через 2с тело прошло 10 м.

Задание 5

Составить уравнение скорости движения, если ускорение тела изменяется по закону a(t) = $3t^2$- 2t +5, а через t=1с скорость равна 8 м/с.

Литература.

1. Учебник Н В. Богомолова “Математика. Среднее профессиональноеобразование”. Москва “Дрофа” 2012г.

2.Г.Н.Яковлев «Алгебра и начала анализа» часть 1. Москва издательство «Наука» 2011г.

3. Учебник В.Т.Лисичкина и И.Л.Соловейчика“Математика. Учебное пособие для техникумов”. Москва ”Высшая школа ” 2014г – 480 с.

Практическое занятие № 9: «Дифференциальные уравненияII-го порядка»

Цели практической работы:

1. Систематизирование, расширение знаний и умений учащихся, связанных с применением методов решения дифференциальных уравнений второго порядка.

2. Формирование практических навыков и умений применять методы решения дифференциальных уравнений второго порядка, развитие навыков самостоятельной работы.

Краткая теория.

В некоторых случаях решение дифференциального уравнения второго порядка может быть сведено к последовательному решению двух дифференциальных уравнений первого порядка (тогда говорят, что данное дифференциальное уравнение допускает понижение порядка). Если дифференциальное уравнение имеет вид

$y''=f(x)$,

то оно решается последовательным интегрированием. Если в запись уравнения не входит искомая функция *y(x)*, т.е. оно имеет вид $G(x, y', y'')=0$, то такое уравнение можно решить, найдя сначала вспомогательную функцию $z=y'$. Если в уравнение не входит переменная *x*, т.е. оно имеет вид $G(y, y', y'')=0$, то порядок уравнения можно понизить, если за независимую переменную взять *y*, а за неизвестную функцию $z=z(y)=y'$.

Линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид $y''+py'+qy=r(x)$, где *p, q* – некоторые действительные числа, *r(x)* – некоторая функция. Если $r(x) \equiv 0$, то уравнение $y''+py'+qy=0$ называется однородным, в противном случае – неоднородным. Чтобы найти общее решение однородного уравнения, надо знать его два частных решения y_1 и y_2.

будем искать решение уравнения в форме $y=e^{\lambda x}$, где λ – некоторое (действительное) число. Так как $(e^{\lambda x})''+p(e^{\lambda x})'+qe^{\lambda x}=(\lambda^2+p\lambda+q)e^{\lambda x}$, то функция $y=e^{\lambda x}$, является решением уравнения $\lambda^2+p\lambda+q=0$, которое называется характеристическим уравнением исходного уравнения.

Теорема. Пусть характеристическое уравнение $\lambda^2+p\lambda+q=0$ уравнения $y''+py'+qy=0$ имеет действительные корни λ_1 и λ_2, причем $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тогда общее решение уравнения имеет вид $y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$, где C_1 и C_2 – некоторые числа.

Теорема.Если характеристическое уравнение имеет один корень λ (кратности 2), то общее решение уравнения имеет вид $y=C_1e^{\lambda x}+C_2xe^{\lambda x}$, где C_1 и C_2 – некоторые числа.

Теорема.Если характеристическое уравнение не имеет действительных корней, то общее решение уравнения имеет вид $y=C_1e^{\alpha x}\sin\beta x+C_2e^{\alpha x}\cos\beta x$, где $\alpha=-p/2$, $\beta=\sqrt{q-p^2/4}$, C_1, C_2 – некоторые числа.

Перейдем к решению линейных неоднородных уравнений $y''+py'+qy=r(x)$ с постоянными коэффициентами. Это уравнение может быть решено методом вариации произвольных постоянных, который состоит в следующем. Сначала находится общее решение $y=C_1y_1+C_2y_2$ однородного уравнения, имеющего ту же левую часть, что и исходное неоднородное уравнение. Затем решение уравнения находится в виде $y=C_1(x)y_1+C_2(x)y_2$, т.е. предполагается, что постоянные C_1 и C_2 являются функциями независимой переменной x. При этом функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ могут быть найдены как решения системы $\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0, \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = r. \end{cases}$

Вариант 1

Задание 1

Решить ДУ II-го порядка: $y'' = 1$.

Задание 2

Найти частное решение ДУ II-го порядка:

$y'' = 4x$, если $y_0 = 0, y' = 8$ при $x_0 = 0$.

Задание 3

Тело движется прямолинейно с ускорением $a = 6t - 4$.При $t=0$ начальный путь $s_0 = 0$, начальная скорость$v_0 = 4$. Найти пройденный путь как функцию времени.

Задание 4

Найти общее решение ДУ II-го порядка:

$y'' = \sin\frac{x}{2}$.

Задание 5

Найти частное решение ДУ II-го порядка:

$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x + 8$, если $y = 12, y' = -5$при $x=-2$.

Вариант 2

Задание 1

Решить ДУ II-го порядка: $y'' = 6$.

Задание 2

Найти частное решение ДУ II-го порядка:

$y'' = 10x+2$, если $y_0 = 4, y' = 6$ при $x_0 = 0$.

Задание 3

Ускорение брошенного вверх тела постоянно и равно - g. Найти уравнение движения, если $s=0, v=0$ при $t = 0$.

Задание 4

Найти общее решение ДУ II-го порядка:

$y'' = \cos 4x$.

Задание 5

Найти частное решение ДУ II-го порядка:

$\frac{d^2y}{dx^2} = x^2$, если $y = 0, y' = 12$ при $x=0$.

Вариант 3

Задание 1

Решить ДУ II-го порядка: $y'' = 12x^2 + 3$.

Задание 2

Найти частное решение ДУ II-го порядка:

$y'' = 10$, если $y_0 = 1, y' = 2$при $x_0 = 0$.

Задание 3

Ускорение свободно падающего тела постоянно и равно g. Найдите закон движения тела, если:s=1м иv = 4 м/св момент времениt = 0.

Задание 4

Найти общее решение ДУ II-го порядка:

$\frac{d^2y}{dx^2} = \sin 2x$

Задание 5

Найти частное решение ДУ II-го порядка:

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x^3}$, если $y = 0, y' = 0$ при $x = 1$.

Вариант 4

Задание 1

Решить ДУ II-го порядка: $y'' = 3x - 2$.

Задание 2

Найти частное решение ДУ II-го порядка:

$y'' = 18$, если $y_0 = 6, y' = 3$ при $x_0 = 0$.

Задание 3

Точка движется прямолинейно с ускорением $a = 12t^2 + 6t$. Найдите закон движения точки, если в момент времени t = 1с ее скорость v= 8 м/с, а путь s = 6 м.

Задание 4

Найти общее решение ДУ II-го порядка:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \cos\frac{x}{2}.$$

Задание 5

Найти частное решение ДУ II-го порядка:

$\frac{d^2y}{dx^2} = x^{-4}$, если $y = 4, y' = 2$ при $x = 0$.

Вариант 5

Задание 1

Решить ДУ II-го порядка: $y'' = 2$.

Задание 2

Найти частное решение ДУ II-го порядка:

$y'' = 4t$, если $y_0 = 0$, $S' = 6$ при $S_0 = 0$.

Задание 3

Тело движется прямолинейно с ускорением $a = -2t + 4$. При $t=1$ начальный путь $s_0 = 4$, начальная скорость $v_0 = 2$. Найти пройденный путь как функцию времени.

Задание 4

Найти общее решение ДУ II-го порядка:

$$y'' = \sin\frac{x}{4}.$$

Задание 5

Найти частное решение ДУ II-го порядка:

$\frac{d^2y}{dx^2} = x \cdot e^{-x}$, если $y = 1$, $y' = 0$ при $x=0$.

Вариант 6

Задание 1

Решить ДУ II-го порядка: $y'' = 8$.

Задание 2

Найти частное решение ДУ II-го порядка:

$y'' = 5x-3$, если $y_0 = 3, y' = 5$ при $x_0 = 0$.

Задание 3

Ускорение брошенного вверх тела постоянно и равно $a = 2t^2 - 4$. Найти уравнение движения, если $s=0, v=0$ при $t = 0$.

Задание 4

Найти общее решение ДУ II-го порядка:

$y'' = \cos 2x$.

Задание 5

Найти частное решение ДУ II-го порядка:

$\frac{d^2y}{dx^2} = x^2 - x$, если $y=1, y' = 2$ при $x=2$.

Вариант 7

Задание 1

Решить ДУ II-го порядка: $y'' = 2x^2 - 3$.

Задание 2

Найти частное решение ДУ II-го порядка:

$y'' = 5$, если $y_0 = 2, y' = 2$при $x_0 = 1$.

Задание 3

Ускорение свободно падающего тела постоянно и равно g. Найдите закон движения тела, если: s=2м иv = 6 м/св момент времениt = 1.

Задание 4

Найти общее решение ДУ II-го порядка:

$\frac{d^2y}{dx^2} = \sin 4x$.

Задание 5

Найти частное решение ДУ II-го порядка:

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x^3}$, если $y = 2, y' = 8$ при $x = 1$.

Вариант 8

Задание 1

Решить ДУ II-го порядка: $y'' = 3x + 1$.

Задание 2

Найти частное решение ДУ II-го порядка:

$y'' = 8x-1$, если $y_0 = 6, y' = 2$ при $x_0 = 1$.

Задание 3

Точка движется прямолинейно с ускорением $a = 9t^2 - 2t$. Найдите закон движения точки, если в момент времени t = 1с ее скорость v= 6 м/с, а путь s= 10 м.

Задание 4

Найти общее решение ДУ II-го порядка:

$\frac{d^2y}{dx^2} = \cos\frac{x}{3}$.

Задание 5

Найти частное решение ДУ II-го порядка:

$\frac{d^2y}{dx^2} = x^{-2}$, если $y = 4, y' = 3$ при $x = 1$.

Литература.

1. Учебник Н В. Богомолова “Математика. Среднее профессиональноеобразование”. Москва “Дрофа” 2012г.

2.Г.Н.Яковлев «Алгебра и начала анализа» часть 1. Москва издательство «Наука» 2011г.

3. Учебник В.Т.Лисичкина и И.Л.Соловейчика “Математика. Учебное пособие для техникумов”. Москва ”Высшая школа ” 2014 г. – 480 с.

Практическое занятие № 10: «Решение задач на элементы комбинаторики»

Цели практической работы:

1. Систематизирование, расширение знаний и умений учащихся, связанных с решением задач на элементы комбинаторики.

2. Развитие навыков самостоятельной работы.

Краткая теория.

Комбинаторикой называется раздел математики, занимающийся решением задач, в которых производится подсчет возможных различных соединений, составленных из конечного числа элементов по некоторому правилу.

Соединениями называются группы, составленные из каких-либо элементов.

Различают три основных вида соединений: размещения, перестановки и сочетания.

Размещения.

Размещениями из n элементов по m называются такие соединения, которые отличаются друг от друга либо самими элементами, либо порядком их следования.

Число размещений из n элементов по m обозначается символами A_n^m и вычисляется по формуле:

$A_n^m = n * (\mathrm{n} - 1) * (n - 2) * \ldots * \big(n - (m - 1)\big).$

$$\boldsymbol{A_n^m = \frac{\mathbf{n}!}{(n - m)!}}$$

Перестановки.

Перестановками из n элементов называются такими соединениями из n элементов, которые отличаются друг от друга лишь порядком следования элементов.

Число перестановок из n элементов обозначается символом Pn.

Перестановки представляют собой частный случай размещения из n элементов по n в каждом.

$P_n = A_n^n$= n*(n-1)*(n-2)*….*1.

Таким образом, число всех перестановок из n элементов равно произведению последовательных натуральных чисел от 1 до n включительно. Произведение 1*2*…*nn- первых натуральных чисел обозначается знаком n! (n!-n-факториал).**n! (n-факториалом)**называется произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно. **n! = 1*2*….*(n-1)*n.**

P_n= n! = 1*2*….*(n-1)*n.

Сочетания.

Сочетаниями из n элементов по m называются такие соединения, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.

Число сочетаний из n элементов по m обозначается символами C_n^m и вычисляется по формуле: $\boldsymbol{C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}}$ **или** $\boldsymbol{C_n^m = \frac{A_n^m}{Pn}}$

Вариант 1

Задание 1

Вычислите: $C_{12}^{3} : A_{12}^{3}$.

Задание 2

Решите уравнение $C_{x+3}^{3} = 6$.

Задание 3

В книжном магазине имеется в продаже 10 книг одной серии. Покупатель решил приобрести 3 книги из этой серии. Сколькими способами он может это сделать?

Задание 4

При окончании деловой встречи специалисты обменялись визитными карточками. Сколько всего визитных карточек перешло из рук в руки, если во встрече участвовали 6 специалистов?

Задание 5

В хоровом кружке занимаются 9 человек. Необходимо выбрать двух солистов. Сколькими способами это можно сделать?

Вариант 2

Задание 1

Вычислите: $A_8^3 : C_8^3$

Задание 2

Решите уравнение $A_x^2 - C_x^2 = 21$

Задание 3

В классе 14 мальчиков и 11 девочек. Для участия в эстафете надо выбрать команду, состоящую из 5 девочек и 5 мальчиков. Сколькими способами можно собрать команду?

Задание 4

Сколько существует вариантов рассаживания вокруг стола 6 гостей на 6 стульях?

Задание 5

Пятеро друзей сыграли между собой по одной партии в шахматы. Сколько всего партий было сыграно?

Вариант 3

Задание 1

Вычислите: $A_{10}^{4} : C_{10}^{4}$

Задание 2

Решите уравнение$A_{x}^{2} + C_{x}^{2} = 84$

Задание 3

В классе 13 девочек и 12 мальчиков. В команду КВН надо выбрать 5 мальчиков и 4 девочки. Сколькими способами можно собрать команду КВН?

Задание 4

В меню столовой предложено на выбор 2 первых блюда, 6 вторых и 4 третьих блюда. Сколько различных вариантов обеда, состоящего из первого, второго и третьего блюда, можно составить?

Задание 5

В магазине продаются блокноты 7 разных видов и ручки 4 разных видов. Сколькими разными способами можно выбрать покупку из одного блокнота и одной ручки?

Вариант 4

Задание 1

Вычислите: $C_9^4 : A_9^4$

Задание 2

Решите уравнение $C_{x+2}^2 = 15$

Задание 3

В кондитерском отделе имеется в продаже 8 видов шоколада “Бабаевский”. Сколькими способами можно выбрать 3 плитки шоколада разного вида?

Задание 4

В магазине продаются блокноты 7 разных видов и ручки 4 разных видов. Сколькими разными способами можно выбрать покупку из одного блокнота и одной ручки?

Задание 5

Сколько различных трёхзначных чисел можно составить при помощи цифр 4, 7, 9? (Цифры в записи числа не повторяются).

Литература.

1. Учебник Н В. Богомолова “Математика. Среднее профессиональноеобразование”. Москва “Дрофа” 2012г.

2.Г.Н.Яковлев «Алгебра и начала анализа» часть 1. Москва издательство «Наука» 2011г.

3. Учебник В.Т.Лисичкина и И.Л.Соловейчика“Математика. Учебное пособие для техникумов”. Москва ”Высшая школа ” 2014г – 480 с.

Практическое занятие № 11: «Решение простейших задач по теории вероятностей с использованием теорем сложения вероятностей»

Цели практической работы:

1. Систематизирование, расширение знаний и умений учащихся, связанных с решением задач по теории вероятностей с использованием теорем сложения вероятностей.

2. Развитие навыков самостоятельной работы.

Краткая теория.

Теория вероятностей – это раздел математики, в котором изучаются случайные явления (события) и выявляются закономерности при массовом их повторении.

Испытанием называется всякое действие, явление, наблюдение с несколькими различными исходами, реализуемое при данном комплексе условий.

Событием называется всякий результат или исход испытания.

Случайным событием называется событие, которое при заданных условиях может произойти или не произойти.

Достоверным называется событие, которое должно непременно произойти.

Невозможным называется событие, которое заведомо не может произойти.

События называются **несовместными**, если каждый раз возможно только появление одного из них.

События называются **совместными**, если в данных условиях появление одного из них не исключает появление другого при том же испытании.

События называются **противоположными**, если в условиях испытания они, являясь единственными его исходами, несовместны. (А и $\overline{A}$).

Полной системой событий $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ называется совокупность , несовместных событий, наступление хотя бы одного из которых обязательно при данном испытании. $p(A) + p(\overline{A}) = 1$; (или $p + \overline{p} = 1$)

Классическое определение вероятности:

Вероятностью события А называется отношение числа исходов m, благоприятствующих наступлению данного события А, к числу n всех исходов (несовместных, единственно возможных и равновозможных):

$$\boxed{p(A) = \frac{m}{n}}$$

$0 \le p \le 1$

Теоремы сложения вероятностей:

Для **<u>несовместных</u>** событий: Вероятность появления хотя бы одного из двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

Для **<u>совместных</u>** событий:

Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Условной вероятностью события А при условии В вероятность наступления события А, вычисленная в предположении, что событие В уже произошло.
Обозначаются: $P_в(A)$ или $P(A/B)$
Если А и В – независимые события, то:

$P(B) – P(B/A) = P(B/\overline{A})$

Пример.

Игральный кубик с полной группой событий, которые состоят в том, что при его броске выпадут 1, 2, 3, 4, 5 и 6 очков соответственно.

Рассмотрим событие $B_{5,6}$ – в результате броска игральной кости выпадет не менее пяти очков. Данное событие состоит в двух несовместных исходах: $B_{5,6} = B_5 + B_6$ *(выпадет 5* или*6 очков)*. По теореме сложения вероятностей несовместных событий:
$P(B_5 + B_6) = P(B_5) + P(B_6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ – вероятность того, что в результате броска игральной кости выпадет не менее пяти очков.

Рассмотрим событие $B_{1-4} = B_1 + B_2 + B_3 + B_4$, состоящее в том, что выпадет не более 4 очков и найдем его вероятность. По теореме сложения вероятностей несовместных событий:
$P(B_1 + B_2 + B_3 + B_4) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) + P(B_4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

По той же теореме, вероятность того, что выпадет нечётное число очков: $P(B_1 + B_3 + B_5) = P(B_1) + P(B_3) + P(B_5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ и так далее.

Вариант 1

Задание 1

Магазин получил продукцию в ящиках с четырех оптовых складов: четыре с 1-го, пять со 2-го, семь с 3-го и четыре с 4-го. Случайным образом выбран ящик для продажи. Какова вероятность того, что это будет ящик с первого или третьего склада?

Задание 2

В коробке 10 красных и 6 синих пуговиц. Наудачу извлекаются две пуговицы. Какова вероятность того, что они будут одноцветными?

Задание 3

В студенческой группе 23 человека. Сколькими способами можно выбрать старосту и его заместителя?

Задание 4

Сколько существует трёхзначных чисел, которые делятся на 5?

Задание 5

Бросили две игральные кости – белую и черную. Какова вероятность того, что на белой выпадет четное число очков, а на черной – нечетное?

Вариант 2

Задание 1

В трех урнах имеется по 6 белых и по 4 черных шара. Из каждой урны извлекают наудачу по одному шару. Найти вероятность того, что все три шара будут белыми.

Задание 2

Сколькими способами можно рассадить 5 человек за столом?

Задание 3

Ученик назвал произвольное двузначное число. Какова вероятность того, что оно кратно 6?

Задание 4

В магазине продаются блокноты 7 разных видов и ручки 4 разных видов. Сколькими разными способами можно выбрать покупку из одного блокнота и одной ручки?

Задание 5

Бросили две игральные кости – белую и черную. Какова вероятность того, что сумма очков на обеих костях не больше 5?

Вариант 3

Задание 1

В группе туристов 30 человек. Их вертолётом в несколько приёмов забрасывают в труднодоступный район по 6 человек за рейс. Порядок, в котором вертолёт перевозит туристов, случаен. Найдите вероятность того, что турист П. полетит первым рейсом вертолёта.

Задание 2

Студенческая группа состоит из 23 человек, среди которых 10 юношей и 13 девушек. Сколькими способами можно выбрать двух человек одного пола?

Задание 3

Ученик назвал произвольное двузначное число. Какова вероятность того, что оно кратно 6?

Задание 4

Ученик назвал произвольное двузначное число. Какова вероятность того, что сумма его цифр меньше 4?

Задание 5

Бросили две игральные кости –белую и черную. Какова вероятность того, что на обеих костях выпадет нечетное количество очков?

Вариант 4

Задание 1

В лифт 12-этажного дома сели 3 пассажира. Каждый независимо от других с одинаковой вероятностью может выйти на любом (начиная со 2-го) этаже. Сколькими способами люди могут выйти на разных этажах?

Задание 2

Алексей занимается спортом, причём 4 дня в неделю – лёгкой атлетикой, 2 дня – силовыми упражнениями и 1 день отдыхает. Сколькими способами он может составить себе расписание занятий на неделю?

Задание 3

Ученик назвал произвольное двузначное число. Какова вероятность того, что оно является квадратом натурального числа?

Задание 4

Бросили две игральные кости – белую и черную. Какова вероятность того, что сумма очков на обеих костях не меньше 8?

Задание 5

Ученик назвал произвольное двузначное число. Какова вероятность того, что сумма этих цифр равна8?

Литература.

1. Учебник Н В. Богомолова “Математика. Среднее профессиональноеобразование”. Москва “Дрофа” 2012г.

2.Г.Н.Яковлев «Алгебра и начала анализа» часть 1. Москва издательство «Наука» 2011г.

3. Учебник В.Т.Лисичкина и И.Л.Соловейчика“Математика. Учебное пособие для техникумов”. Москва ”Высшая школа ” 2014г – 480 с.

Практическое занятие № 12: «Решение практических задач по основам математической статистики»

Цели практической работы:

1. Закрепление знаний по теме «Основы математической статистики».

2. Формирование практических навыков и умений при решении задач по основам математической статистики, развитие навыков самостоятельной работы.

Краткая теория.

На практике функция распределения случайной величины бывает неизвестна и ее определяют по результатам наблюдений или, как говорят, по выборке. Выборкой объема n для случайной величины называется последовательность независимых наблюдений этой величины, где $x_1, x_2, ..., x_n$ – совокупность значений, принятых независимыми случайными величинами $X_1, X_2, ..., X_n$, имеющими тот же закон распределения $F(x)$, что и величина *X*. В этом случае говорят, что выборка $x_1, x_2, ..., x_n$ взята из ***генеральной совокупности*** величины *X*, а под законом распределения генеральной совокупности понимают закон распределения случайной величины *X*. Значения $x_1, x_2, ..., x_n$ называют выборочными значениями или ***вариантами***. Последовательность вариант, записанных в возрастающем порядке, называется ***вариационным рядом***. Число, указывающее, сколько раз наблюдается данная варианта, называется ***частотой варианты***, а отношение частоты варианты к объему выборки – ***относительной частотой***.

Если $x_1, x_2, ..., x_n$ – вариационный ряд, а x – произвольное число, и n_x – количество выборочных значений, меньших *x*, то $\frac{n_x}{n}$ – частота попадания выборочных значений левее точки *x* в данной выборке объема *n*, т. е. частота события $(X < x)$.

Эта частота является функцией от *x* и называется ***эмпирической функцией распределения*** **случайной величины *X***, полученной по данной выборке. Если обозначить эту функцию через $F^*(x)$, то по определению

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n}.$$

Эмпирическая функция распределения $F^*(x)$ обладает всеми свойствами функции распределения $F(x)$. Так как частота события в *n* независимых опытах является оценкой вероятности этого события, то значение эмпирической функции распределения в точке *x* есть оценка вероятности события $(X < x)$, то есть оценка теоретической функции распределения $F(x)$:

$$F(x) \approx F^*(x).$$

Статистическим рядом распределения называется таблица, которая содержит вариационный ряд и соответствующие частоты или относительные частоты членов этого ряда (табл. 1).

$\sum_{i=1}^{n} n_i = n$,

$w_i = \frac{n_i}{n}$, $\quad \sum_{i=1}^{n} w_i = 1$

Таблица 1

x_1	x_2	...	x_k
n_1	n_2	...	n_k
w_1	w_2	...	w_k

Таблица 2

$(x_0; x_1)$	$(x_1; x_2)$	...	$(x_{k-1}; x_k)$
n_1	n_2	...	n_k
w_1	w_2	...	w_k

В случае непрерывного распределения величины *X* статистический ряд распределения представляет собой таблицу, в которой заданы интервалы значений величины *X* и соответствующие им частоты или относительные частоты, причем интервалы располагаются в порядке возрастания величины *X* (табл. 2).

Второй случай легко сводится к первому, если в качестве вариант брать середины интервалов:

$\hat{x}_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$, $\; i = \overline{1, k}$.

Графически табл. 1 изображается ***полигоном частот***, представляющим собой ломаную, отрезки которой соединяют на плоскости соседние точки $(x_i; n_i)$ и $(x_{i+1}; n_{i+1})$ или $(x_i; w_i)$ и $(x_{i+1}; w_{i+1})$, если строится полигон относительных частот.

В случае табл. 2 исходный интервал, в котором заключены все наблюдаемые значения признака, разбивают на определенное количество равных интервалов длины $h = x_i - x_{i-1}$. После этого строится ***гистограмма частот*** – ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основания которых равны *h*, а высоты равны отношению $\frac{n_i}{h}$ (или $\frac{w_i}{h}$ для гистограммы относительных частот).

Гистограмма относительных частот является аналогом функции плотности, так как площадь под ней равна единице. Число интервалов разбиения находят по формуле $k = 1 + 3{,}322 \lg n$, где *n* – объем выборки. Тогда длина каждого интервала $h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k}$, где $x_{\max}$ и $x_{\min}$ – максимальное и минимальное значение выборки соответственно.

По аналогии с такими числовыми характеристиками случайной величины, как математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение, для выборки $x_1, x_2, ..., x_n$ случайной величины *X* и для статистического ряда определяются следующие числовые характеристики:

выборочная средняя $\bar{x}_в = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} n_i x_i$,

где k – число вариант и $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$;

выборочная дисперсия $D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i\left(x_i - \bar{x}_в\right)^2$ или $D_в = \overline{x^2} - \left(\bar{x}_в\right)^2, \overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2$;

выборочное среднее квадратическое отклонение $\sigma_в = \sqrt{D_в}$

Несмещенной и состоятельной оценкой математического ожидания $M(X)$ является выборочная средняя $\bar{x}_в$.

Несмещенная и состоятельная оценка S^2 ***дисперсии*** $D(X)$ вычисляется по формуле:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} n_i\left(x_i - \bar{x}_в\right)^2 = \frac{n}{n-1}D_в \cdot$$

где S^2 –*исправленная дисперсия*.

Для оценки среднего квадратическогоотклонения σ используется величина S, равная квадратному корню из исправленной дисперсии, которая называется *исправленным средним квадратическим отклонением*.

Рассмотренные оценки характеризуются одним числом и называются ***точечными***.

Вариант 1

Задание 1

По заданному статистическому ряду требуется:

а) построить гистограмму относительных частот;

б) перейти к вариантам и построить полигон относительных частот;

в) построить эмпирическую функцию распределения;

г) найти статистические оценки $\bar{x}_в; D_в(x); \sigma_в(x)$.

$x_i - x_{i+1}$	12 –15	15 – 18	18 – 21	21 – 24	24 – 27	27 – 30
n_i	2	6	12	19	7	4

Вариант 2

Задание 1

Статистический ряд задан таблицей. Требуется:
а) построить гистограмму относительных частот;
б) перейти к вариантам и построить полигон относительных частот;
в) записать эмпирическую функцию распределения и построить ее график;
г) найти точечные оценки $\overline{x}_в, D_в, \sigma_в$;

(–6; –4)	(–4; –2)	(–2; 0)	(0; 2)	(2; 4)	(4; 6)
2	6	17	18	4	3

Вариант 3

Задание 1

Статистический ряд задан таблицей. Требуется:
а) построить гистограмму относительных частот;
б) перейти к вариантам и построить полигон относительных частот;
в) записать эмпирическую функцию распределения и построить ее график;
г) найти точечные оценки $\overline{x}_в, D_в, \sigma_в$;

(0; 2)	(2; 4)	(4; 6)	(6; 8)	(8; 10)	(10; 12)
1	3	19	21	4	2

Вариант 4

Задание 1

Статистический ряд задан таблицей. Требуется:
а) построить гистограмму относительных частот;
б) перейти к вариантам и построить полигон относительных частот;
в) записать эмпирическую функцию распределения и построить ее график;
г) найти точечные оценки $\overline{x}_в, D_в, \sigma_в$;

(–4; –2)	(–2; 0)	(0; 2)	(6; 8)	(8; 10)	(10; 12)
3	8	14	15	9	1

Литература.

1. Учебник Н В. Богомолова “Математика. Среднее профессиональноеобразование”. Москва “Дрофа” 2012г.

2.Г.Н.Яковлев «Алгебра и начала анализа» часть 1. Москва издательство «Наука» 2011г.

3. Учебник В.Т.Лисичкина и И.Л.Соловейчика“Математика. Учебное пособие для техникумов”. Москва ”Высшая школа ” 2014г – 480 с.

4. Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко «Математика» учебник для ССУЗов Москва: «Дрофа» 2013 гл. стр.;
5.Методическое обеспечение.